

Title	Constrained System の Characteristic Surface の局所的分類 について(力学系理論と特異現象)
Author(s)	岡, 宏枝
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 602: 130-136
Issue Date	1986-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/99637">http://hdl.handle.net/2433/99637</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Constrained System の Characteristic Surface の局所的な分類について

京大理学部 岡 宏枝 (Hiroe Oka)

1. 一年前の研究集会<sup>1)</sup>において

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^{n-r}, \varepsilon: \text{small} \in \mathbb{R} \quad (1)_\varepsilon$$

の形の ODE を内的な形で、次のように定式化した:

$M$ :  $n$ 次元  $C^m$ 多様体,  $v$ :  $M$ 上のベクトル場,  $A$ :  $TM$ の bundle endomorphism で、各  $x \in M$  に対して、 $A(x)$  の corank が一定であるとする。

定義 1. 組  $(A; v)$  を Constrained system といい、 $A$  の corank が一定値  $r$  のとき、 $(A; v)$  を constrained system of corank  $r$  といい。

定義 2. 2つの constrained system  $(A; v), (A'; v')$  が 同値 であるとは、bundle automorphism  $P$  と diffeomorphism  $\varphi$  が存在して、

$$(A'; v') = (P \circ T\varphi \circ A \circ T\varphi^{-1}; P \circ T\varphi \circ v \circ \varphi^{-1})$$

が成立することである。また、 $(P; \varphi)$  を 変換 という。

定義 3. Constrained system  $(A; v)$  に対し、

$$\Sigma = \{x \in M \mid v(x) \in \bigcup_{x \in M} \text{Im } A(x)\}$$

を characteristic surface という。

2. 以下、 $x_0 \in M$  における germ で考える。Constrained system  $(A; v)$  の局所的表現を、一般性を失うことなく、

$$\begin{pmatrix} A_1(x, y) & A_2(x, y) \\ A_3(x, y) & A_4(x, y) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

(但し、 $A_4$  は原点  $(0, 0)$  のまわりで non-singular) と表わすことができる。さらに、変換、

$$(P; \varphi) = \begin{pmatrix} I_r & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}; \text{id}$$

によ、2. (2) は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(x, y) & I_{n-r} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (3)$$

という形になる。ここで

$$K(x, y) = K_{ij}(x, y), \quad r+1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq r$$

は  $(n-r) \times r$  の行列である。次の定理は、更に  $K$  が変換で消せるための条件を与える。

定理 4. Constrained system (3) が変換によ、2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega'_1(x, y) \\ 0 & I_{n-r} & \omega'_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (4)$$

の形に出来るための必要十分条件は.

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i=r+1}^n K_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq j \leq r$$

なる  $r$  個のベクトル場の germ に対し.

$$[X_j, X_k] = 0, \quad 1 \leq j, k \leq r \quad (\star)$$

が成立することである。

条件  $(\star)$  は、bundle endomorphism  $A$  の kernel field の可積分条件である。条件  $(\star)$  が  $M$  のすべての点でみたされているとき、 $A$  の kernel field は、 $r$  次元の foliation を定める。これは、Ikegami<sup>2), 3)</sup> による 'constraint system' の定式化における foliation に対応している。

(4) の形の constrained system の characteristic surface は、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \omega'_1(x, y) = 0\}$  で与えられる。

命題 5. (4) の形の 2 つの constrained system が同値であるとする:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ 0 & I_{n-r} & v_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & I_{n-r} & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

このとき、 $v_1$  と  $\omega_1$  は contact equivalent である。すなわち、ある non-singular matrix valued function  $P_1$  と  $\mathbb{R}^n$  の diffeomorphism  $\psi = (\psi_1(x, y), \psi_2(y))$  が存在して、

$$\omega_1(x, y) = P_1(x, y) \cdot v_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(y))$$

が成立する。

特に、corank 1 の Constrained system は、いつも条件 (☆) をみたすことから、それらの characteristic surface は contact equivalence で分類されることがわかる。

Contact codimension 0 の characteristic surface としては、

$\{x=0\}$ , fold:  $\{y-x^2=0\}$ , cusp:  $\{y-x^2+x^3\}$  等があるが、この結果を Zeeman の仕事<sup>4), 5)</sup> と比べれば面白いであろう。また直観的にいって、(1) の形の方程式は  $\varepsilon = 0$  としたとき、

mapping  $f$  とベクトル場  $g$  の組となる。その意味で、何人かの人口に指摘されてきているように、constrained system は、

mapping とベクトル場の中間的存在といえよう。従って、constrained system の研究は、初等カタストロフ理論と一般カタストロフ理論の中間に位置づけられる。上で述べた characteristic surface が mapping の contact equivalence で分類されるという結果は、そのような考えによく適合していると思われる。私は、ここで述べた枠組で constrained system のアトラクターを研究することが、一般カタストロフ理論へ、何らかの寄与をすることを期待する。

3. 次に我々は、corank 1 の Constrained system  $(A; v)$  に関する '直線化定理' について述べる。2. の結果より、

$(A; v)$  の局所的表現として,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1(x, y) \\ 0 & I_{n-1} & v_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (5)$$

の形のものがとれ、また、 $v_1$  は contact equivalence で分類されることばわかる。このとき、原点  $(0, 0)$  のまわりの標準形について、次の定理が成立する。

定理 6. (i) (5) において、 $v_1(0, 0) \neq 0$  ならば、(5) は原点のまわりの十分小さい近傍で、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と同値である。

(ii) (5) において、 $v_1(0, 0) = 0$ ,  $\partial v_1 / \partial x(0, 0) \neq 0$ ,  $v_2(0, 0) \neq 0$  ならば、(5) は、原点のまわりの十分小さい近傍で、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & I_{n-1} & e_{n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

と同値である。ここで、 $e_{n-1} = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$  である。

上の定理 6 (i) は、constant な constrained system に出来るという意味で 直線化定理 といえよう。また、定理 6 (ii) も、ある意味で ‘直線化’ 出来ることを示している。

いま、2次元の constrained system で、(6) の unfolding とし、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{あるいはODEの形で} \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

を考えると、これは、 $x$ 軸方向のオーダー  $1/\varepsilon$  の速い運動を示す。(Fig. 1) また、同様に(7)の unfolding として、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{あるいはODEの形で} \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \quad (9)$$

を考えると、これは、characteristic surface  $\{x=0\}$  上の  $\varepsilon^0$  のオーダーの遅い運動と、それ以外の場所での  $x$  軸方向の速い運動を示している。(Fig. 2)

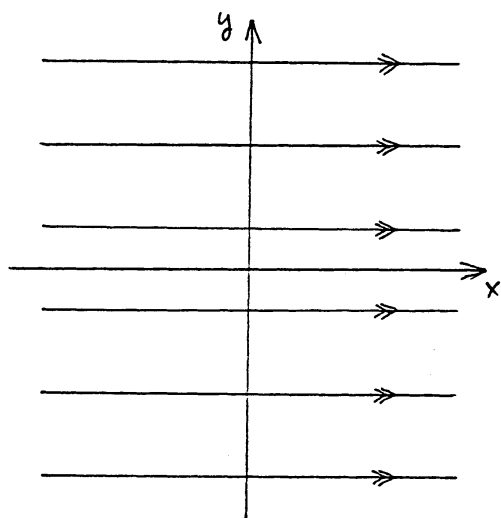


Fig. 1. (8)の phase portrait

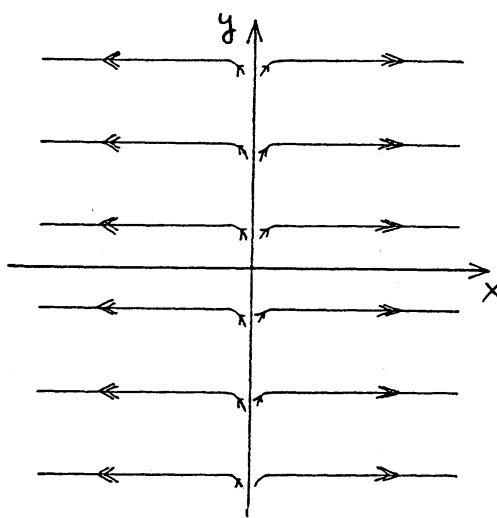


Fig. 2 (9)の phase portrait

2.及び3. に述べた結果の証明については、Okamoto<sup>6)</sup> を参照して頂きたい。

## 4. 参考文献

- 1) Oka, H. 数理解析研究所講究録 574 「力学系と非線形振動現象」 1985年 12月
- 2) Ikegami, G. Vector fields tangent to foliations, Japanese J. Math. 12-1 (1986), 95-120.
- 3) Ikegami, G. Singular perturbations in foliations, preprint
- 4) Zeeman, E. C. Differential equations for heartbeat and nerve impulse, in 'Dynamical systems, Salvador 1971', Academic Press, 1973, 683-741
- 5) Zeeman, E. C. Levels of structures in catastrophe theory illustrated by applications in the social and biological science, in 'Proceedings of The International Congress of Mathematics, Vancouver, 1974' vol. 2, 533-546
- 6) Oka, H. Constrained system, characteristic surface, and normal form, submitted to Japan. J. Appl. Math.